САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА

САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2016 СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 2

Самара, 2016г.

Дорогие друзья!

Все задачи, представленные Вашему вниманию в данном релизе, являются оригинальными и составлены в соответствии с ***Перечнем*** *вопросов по астрономии, рекомендуемых предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады по астрономии и физике космоса для подготовки школьников 10-11 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: **«Условия и решения конкурсных задач олимпиады по астрономии SAMRAS-2016 среди учащихся 8-9 классов заочного тура № 2». – http://v937184r.bget.ru/SamRAS.htm**

Автор задач – ***Филиппов Юрий Петрович***, научный руководитель школы, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева, к.ф.-м.н., методист СДДЮТ.

Верстка в системе LaTeX – Филиппов Ю.П.

Памятка участника SamRAS-2016

1. ***Официальная страница Астрошколы***:
http://v937184r.bget.ru/SamRAS.htm

2. ***Официальная группа в VK***:
http://vk.com/samras2016

3. ***Электронный ящик SamRAS-2016:***
samras2016@mail.ru

4. ***Сроки подачи работ SamRAS-2016 тура № 2 на проверку***:
01.03.2016-30.04.2016!!!

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Изменения азимутов и высот восходящей-заходящей звезды»

Условие. В какой части небосвода у восходящей-заходящей звезды изменяется с максимальной скоростью а) высота, б) азимут? (3 балла).

Задача № 2. «Кругосветка Turanor PlanetSolar – яхты на солнечных батареях»

Рис. 1: Turanor PlanetSolar – яхта на солнечных батареях (источник: www.aenews.ru).

Условие. В мае 2012 года закончила кругосветное путешествие яхта на солнечных батареях Turanor PlanetSolar, созданная командой специалистов из Швейцарии и Германии в 2010 году. За 584 суток кругосветки яхта прошла порядка 60 тысяч километров. Оцените среднюю скорость ($\bar{V}$) движения яхты. Оцените время, которое понадобилось бы судну для совершения кругосветки, если последнее двигалось вдоль земного экватора (в предположении наличия постоянного водного пути) с постоянной круизной скоростью, равной $V_{\rm cr} = 13.9$ км/ч? (3 балла).

Задача № 3. «Фазы Луны и ее гелиоцентрические расстояния»

Условие. На рис. 2 представлены фазы Луны, наблюдавшиеся в январе 2016 года. В какой день января (укажите соответствующую дату и день недели) расстояние от Луны до Солнца было наибольшим? А в какой день оно было наименьшим? Орбиты Луны и Земли считать круговыми, наклонением орбиты Луны пренебречь. Ответ поясните. (3 балла).

Задача № 4. «О рассеянном скоплении»

Условие. Какие еще названия (назовите не менее трех!) носит рассеянное звездное скопление, собственное имя которого "Семь сестер"? Назовите семь самых ярких звезд этого скопления. Нарисуйте от руки астеризм, который они образуют. В каком созвездии оно расположено? (4 балла).

Задача № 5. «Три кратера Луны и три великих ученых»

Условие. На рисунке 3 Вашему вниманию представлена фотография Луны в фазе полнолуния, полученная 25.12.2015 года. Укажите на распечатанной копии фотографии кратеры, названные в честь великого

1) датского астронома XVI века, основателя первой Европейской обсерватории Ураниборг;

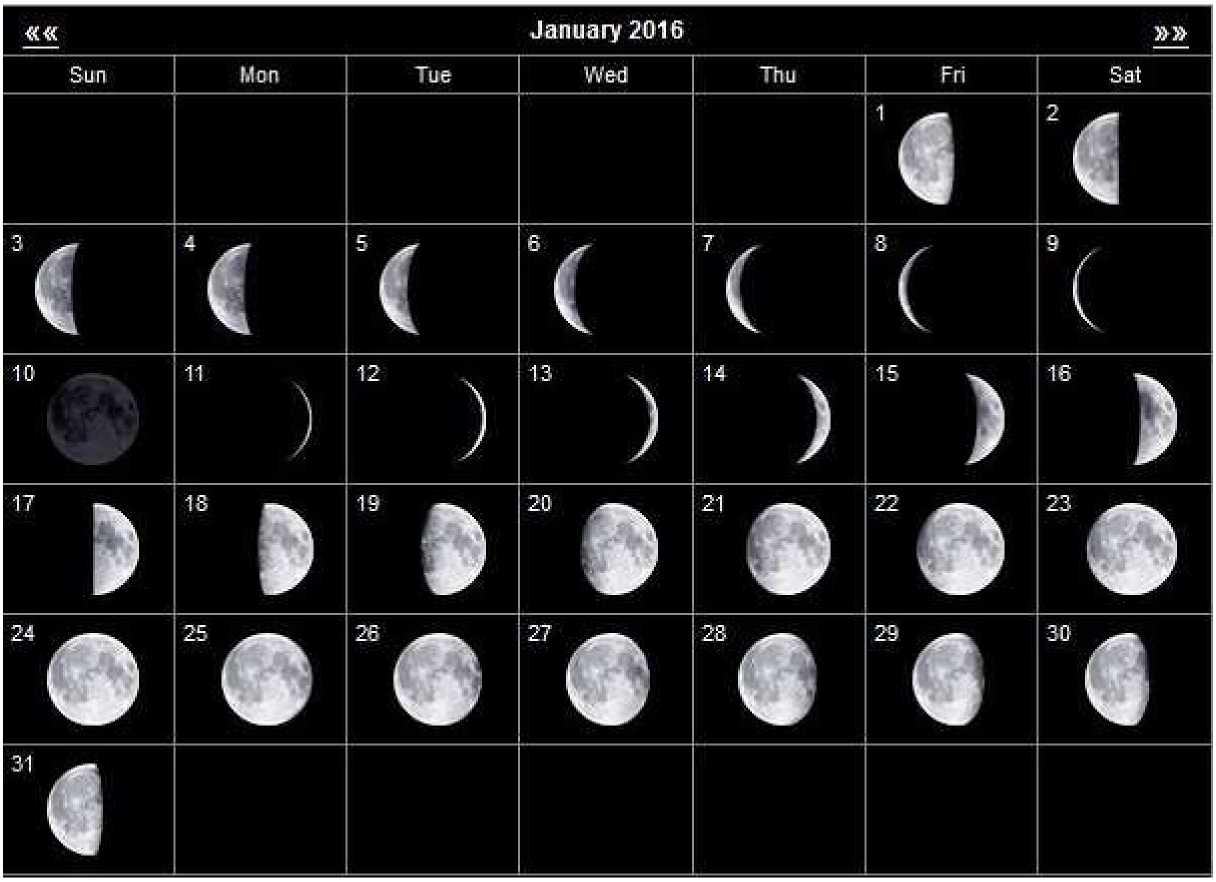


Рис. 2: Фазы Луны в январе 2016 года (источник: http://god-2016.com/kalendar/).

2) польского астронома, математика, механика XVI века, автора гелиоцентрической системы мира;

3) немецкого астронома, механика, первооткрывателя законов движения планет Солнечной системы. (за каждый правильный ответ 2 балла).

Задача № 6. «Противостояние Марса 2016 года»

Условие. Определите какой из приведенных на рис. 4 (укажите соответствующий ему месяц и если есть дату) образов Марса будет соответствовать ему в противостоянии, которое произойдет в 2016 году? Оцените гелиоцентрическое расстояние до планеты на указанный момент, опираясь лишь на результат для радиуса планеты ($\mathfrak{R}_{♂} = 3396$ км) и данные приведенные на картинке. Орбиты Марса и Земли считать круговыми. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 7. «Выбор бинокля в магазине г.о. Самара»

Условие. Предположим, Вы решили приобрести бинокль для астрономических наблюдений. В магазинах г.о. Самары, реализующих розничную торговлю оптических инструментов, покупателю в настоящее время предложены модели биноклей, представленные в таблице 1. Какой из указанных биноклей будет оптимальным для

а) панорамных наблюдений звездного неба (удерживая инструмент в руках), знакомства с астеризмами и созвездиями?

Рис. 3: Луна в полнолуние (источник: http://www.nasa.gov/).

Рис. 4: к определению видимого образ Марса в различные моменты 2016 года, на фоне части диска Луны (источник: astro-lert.ru).

Бинокль	D_{Ob}, мм	Г, $^{\times}$	Ω, град	β, $''$	$m_{\max}$, $^{\text{m}}$	Покрытие
Nikon ACULON A211 7 × 35	35	7	9.3	5.6	9.8	многослойное
Norin 8 × 40	40	8	7.8	5.2	10.1	однослойное
Nikon ACULON A211 10 × 42	42	10	6.0	5.0	10.2	многослойное
Nikon ACULON A211 16 × 50	50	16	4.2	4.0	10.6	многослойное
Dicom Eagle Zoom 10 − 30 × 60	60	10 ÷ 30	2 ÷ 3.6	3.3	11.0	однослойное
Veber Classic БПЦ 30 × 60 VR	60	30	3.0	3.3	11.0	однослойное
Celestron SkyMaster 25 × 70	70	25	2.7	2.8	11.3	многослойное
Celestron SkyMaster 20 × 80	80	20	3.2	2.5	11.6	многослойное

Примечание: D_{Ob} – диаметр объектива, Г – увеличение, Ω – действительное поле зрения, β – разрешающая способность бинокля, $m_{\max}$ – его проницающая сила.

Таблица 1: некоторые модели биноклей, представленные в магазинах г.о. Самары.

б) для наблюдений за двойными звездами, планетами и их спутниками?

в) для изучения тусклых туманностей, шаровых скоплений, галактик (Deep-Sky объектов)? (6 баллов).

Задача № 8. «Солнце в Северном Гоа»

Условие. Жительница г.о. Самара Давыдова Л.М., отдыхая в Северном Гоа, 9 января 2014 года сделала фотографии видимого диска Солнца (см. рис. 5.а-б). На фотографиях видны не менее пяти крупных солнечных пятен. На рис. 5.в представлена фотография, полученная с помощью космической обсерватории SOHO того же числа. Объясните, почему солнечные пятна по-разному расположены на диске Солнца на этих фотографиях? В какое время суток были сделаны эти фотографии? Почему на фотографиях Давыдовой Л.М. диск Солнца видится сплюснутым, а на фотографии обсерватории он абсолютно круглый? (7 баллов).

Задача № 9. «Юпитерианская истинная солнечная секунда»

Условие. Во сколько раз продолжительность истинной солнечной секунды на Юпитере, отличается от соответствующего значения на Земле? (8 баллов).

Задача № 10. «Кратность увеличения лупы»

Условие. Докажите, что угловое увеличение оптической системы «лупа-глаз», при получении прямого изображения предмета (рассматриваемого гла-

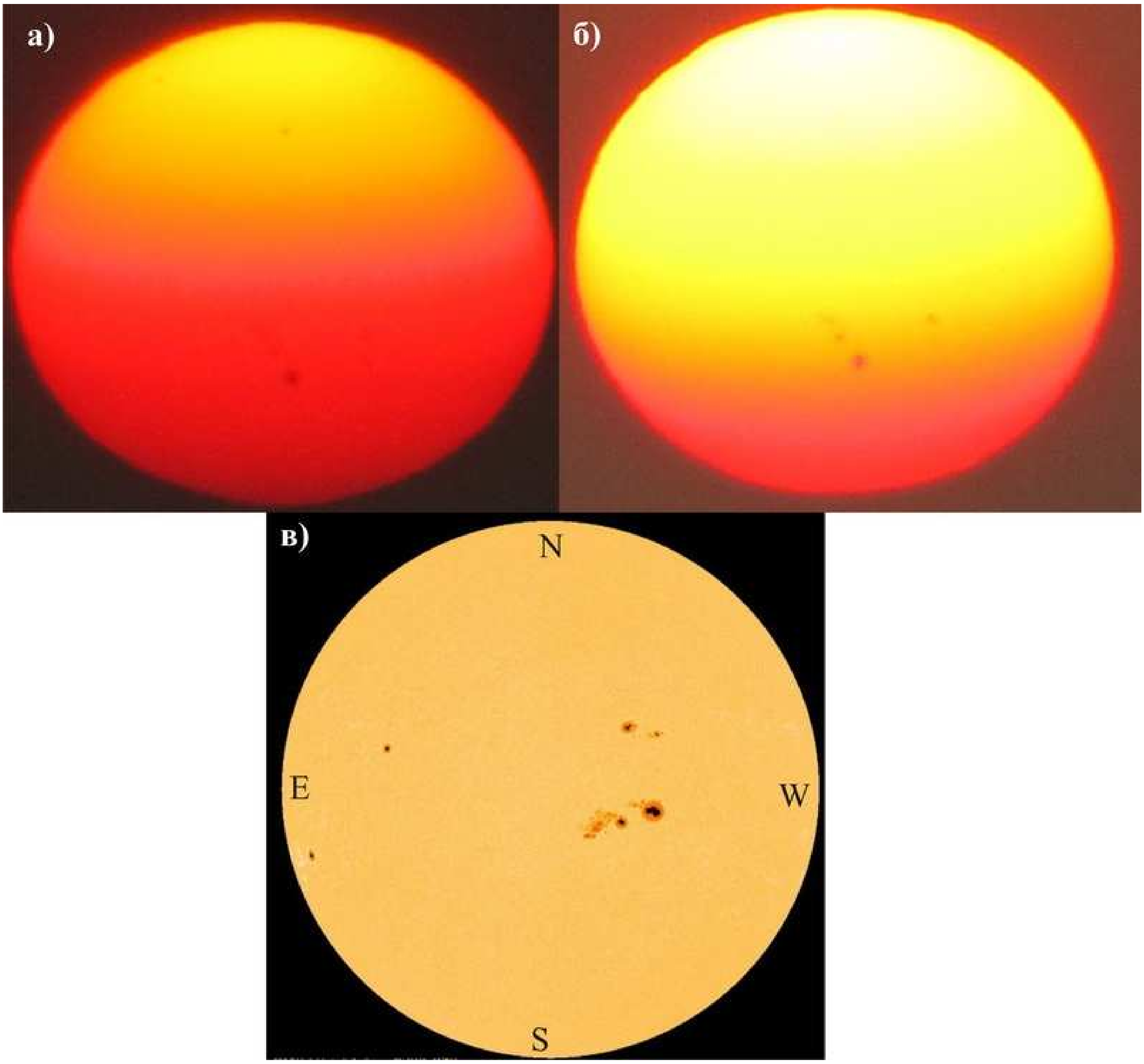


Рис. 5: а)-б) фотографии Солнца, сделанные жительницей г.о. Самара Давыдовой Л.М. 9.01.2014 года в Северном Гоа; в) фотография Солнца, полученная с помощью космической обсерватории в те же сутки.

зом, расположенным вплотную к лупе), не может быть меньше величины $1 + d_0/f$, где d_0 – расстояние наилучшего зрения (для взрослого человека средних лет $d_0 = 25$ см); f – фокусное расстояние линзы. (8 баллов).

Задача № 11. «Транзиты Меркурия»

Условие. Какое максимальное количество транзитов Меркурия по диску Солнца можно было бы наблюдать за один календарный год, если его плоскость орбиты совпадала бы с плоскостью орбиты Земли, а сама орбита была бы круговой? Как часто такой "транзитный" год повторялся бы? Сидерические периоды обращения Меркурия и Земли вокруг Солнца равны соответственно $T_{☿} = 87.9691$ сут, $T_{\oplus} = 365.2564$ сут. (9 баллов).

Задача № 12. «Моя любовь на пятом этаже...»

Условие. В тексте песни «Моя любовь на пятом этаже» группы «Секрет» есть следующие строки:

1) Снова дом все тот же дом
Как я ему он мне знаком
Он меня считает чудаком
Пришел опять сюда стоять
Всю ночь не спать и ждать...

2) Моя любовь на пятом этаже
Почти где луна
Моя любовь конечно спит
Уже спокойного сна
Моя любовь на пятом этаже...

3) На часах четвертый час
фонарь луны давно погас
С якоря сниматься в самый раз...

Рис. 6: к определению масштабов пятиэтажной "хрущевки" (источник: http://vseont72.ru/upload/medialibrary/).

Опираясь на данные строки и на образ типичной пятиэтажной "хрущевки" (см. рис. 6), определите допустимые значения расстояния от дома, на котором мог располагаться главный герой этой песни, если предполагать, что все события происходили в г. Самаре ($\varphi_S = 53°12'$), а Луна на уровне пятого этажа им наблюдалась вблизи меридиана. Какую Луну наблюдал герой этой песни – растущую или убывающую (при наличии стабильно ясного неба)? (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень C)

Задача № 13. «Центральные меридианы часовых поясов на Юпитере»

Условие. Если для гипотетического обитателя юпитерианской атмосферы ввести поясное время (аналогичное земному), то какое расстояние между

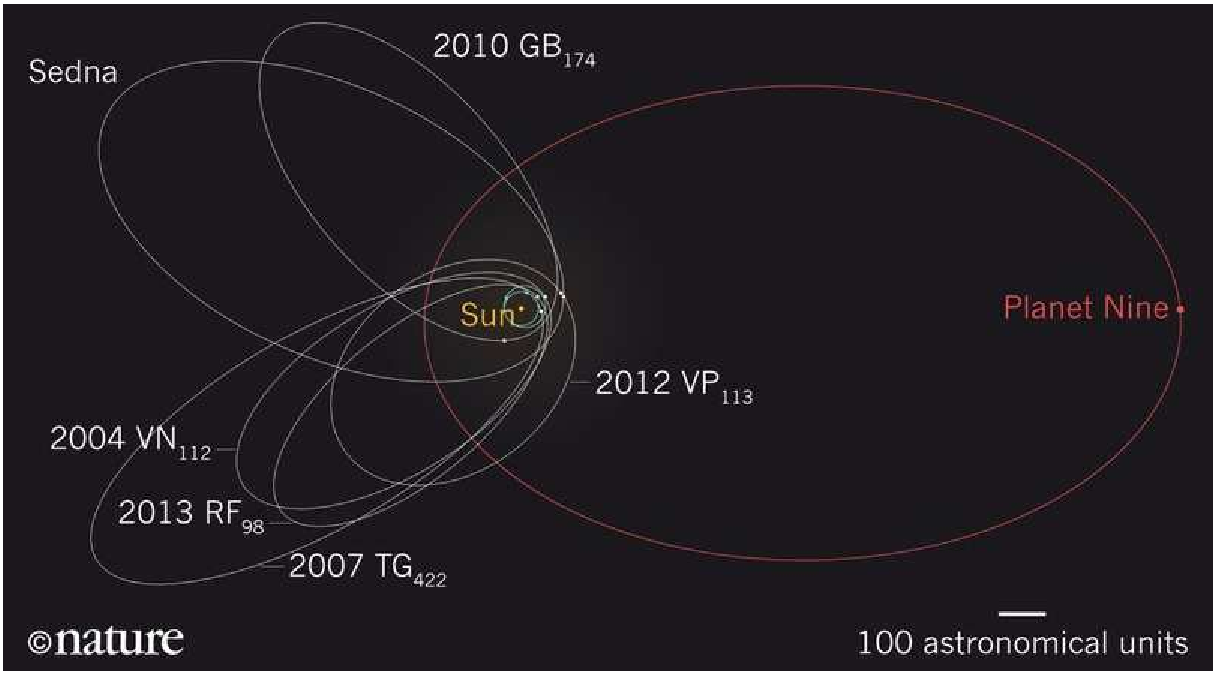


Рис. 7: к определению орбиты Planet Nine (источник: nature.com).

двумя соседними центральными меридианами соседних часовых поясов будет на экваторе Юпитера? На широте 45 градусов? Экваториальный радиус и коэффициент сжатия Юпитера у полюсов принять равными $\mathfrak{R}_J^{(e)} = 71492$ км и $k = 0.065$ соответственно. (11 баллов).

Задача № 14. «Проект ракеты на шариках»

Условие. Предложен проект космической ракеты, которая приводится в движение в открытом космосе за счет выброса одинаковых твердых шариков со скоростью v относительно ракеты, масса которых в η раз меньше начальной массы ракеты. Определите скорость ракеты u после выброса n-го шарика. Следует полагать, что начальная скорость ракеты равна нулю. Ответ, по возможности, следует представить в максимально компактном виде. (12 баллов).

Задача № 15. «Planet Nine и ее орбитальные характеристики»

Условие. В недавно опубликованной работе известного американского астрофизика Брауна М. Е. и его коллеги Ботыгина К. представлены результаты компьютерного моделирования эволюции орбит шести крайне удаленных объектов Солнечной системы. Согласно заключению авторов, на периферии Солнечной системы должна существовать, как минимум, одна планета с массой порядка 10 земных масс Земли (суперземля), получившая название Planet Nine. На рис. 7 представленная авторами карта взаимного расположения орбит рассмотренных тел. Опираясь на нее, оцените а) расстояния до перигелия и афелия орбиты Planet Nine, б) ее большую полуось и эксцентриситет, в) период обращения вокруг Солнца. Проверьте д) работает ли закон Тициуса-Боде для данной планеты? е) существует ли орбитальные резонансы классических планет и Planet Nine в движении вокруг Солнца? (13 баллов).

Задача № 16. «Расстояние до рассеянного скопления M36»

Условие. Рассеянное звездное скопление M36, расположенное в созвездии Возничего, представляет собой гравитационно связанную систему из $N_{\rm tot} = 60$ звезд, наиболее яркие (их $\eta = 2/3$ от общего числа) из которых относятся к звездам-гигантам спектрального класса B0-B5 и определяют интегральную звездную величину $m_{int} = +6.0^m$ скопления. Абсолютная звездная величина таких звезд на $5.5^{\rm m}$ меньше соответствующей величины для Солнца. Оцените расстояние до скопления (в парсеках). (13 баллов).

Задача № 17. «Минимальная и максимальная области прямой видимости ИСЗ с Земли»

Условие. Определите минимальное и максимальное значения доли поверхности Земли, расположенные в пределах прямой видимости для искусственного спутника Земли. Следует полагать, что минимальный радиус орбиты спутника равен 180 км, а максимальный – радиусу сферы Хилла системы «Земля-Солнце». Все необходимые данные возьмите из специализированной литературы. (14 баллов).

Задача № 18. «Проект орбитальной космической печи»

Условие. Предложен проект космической печи для плавления металла с температурой плавления $T_{\rm m}$. Сама печь будет сделана из самого тугоплавкого материала – сплава карбидов гафния и тантала (температура плавления – $T_{\max} = +4215°$C, альбедо – $A_f = 0.1$). Предполагается, что данная печь будет двигаться в околосолнечном космическом пространстве по круговой орбите и за один оборот должна расплавлять порцию металла, имеющую форму шара радиуса R, с альбедо $A_{\rm m}$, удельной теплотой плавления $\lambda_{\rm m}$ и массовой плотностью $\rho_{\rm m}$. Рассмотрите в качестве конкретных примеров следующие металлы: 1) алюминий ($R = 1$ м, $\rho_{\rm m} = 2700$ кг/м^3, $\lambda_{\rm m} = 398.31$ кДж/кг, $A_{\rm m} = 0.19$, $T_{\rm m} = 933.5$ K); 2) никель ($R = 1$ м, $\rho_{\rm m} = 8902$ кг/м^3, $\lambda_{\rm m} = 299.728$ кДж/кг, $A_{\rm m} = 0.15$, $T_{\rm m} = 1999$ K) и найдите соответствующие значения радиуса орбиты и периода обращения. Следует учесть, что при высоких температурах металлы излучают как абсолютно черное тело. Определите также максимально возможную массу никеля, которую можно расплавить за один период обращения печи вокруг Солнца, если полагать, что печь имеет форму шара радиуса R_f. Найти соответствующие значения периода и радиуса орбиты. (10 баллов).

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Изменения азимутов и высот восходящей-заходящей звезды»

Решение: Как известно, все восходящие-заходящие звезды в суточном движении перемещаются с востока на запад, по часовой стрелке, если при этом смотреть на точку юга, каждая со своей постоянной угловой скоростью ω_*, вдоль суточных параллелей. Их плоскости составляют угол $90^\circ - \varphi$ с горизонтом (здесь φ – широта местности).

а) Скорость изменения высоты звезды ω_h максимальна будет в случае, когда угол α между касательной к параллели звезды и ее вертикалом будет минимальным (в этом случае $\omega_h = \cos\alpha \cdot \omega_*$). Очевидно, что это достигается у горизонта (в восточной и западных частях небесной сферы) – в точках восхода и захода звезды.

б) Скорость изменения азимута звезды ω_A максимальна будет в случае, когда угол β ($\beta = 90^\circ - \alpha$) между касательной к параллели звезды и математическим горизонтом будет минимален (здесь $\omega_A = \cos\beta \cdot \omega_*$)), что очевидно, достигается в меридиане, в точке верхней (или нижней) кульминации.

Ответ: а) скорость изменения высоты звезды максимальна у горизонта (в восточной и западных частях небесной сферы) – в точках восхода и захода звезды; б) скорость изменения азимута звезды достигается в меридиане, в точке верхней (или нижней) кульминации. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 2. «Кругосветка Turanor PlanetSolar – яхты на солнечных батареях»

Дано:
$t_{tot}^{(1)} = 584$ сут,
$s_{tot} = 60 \cdot 10^3$ км,
$V_{\rm cr} = 13.9$ км/ч.

Найти:
$\bar{V}$ – ?
$t_{tot}^{(2)}$ – ?

Решение:

Средняя скорость движения яхты определяется выражением:

$$\bar{V} = \frac{s_{tot}}{t_{tot}^{(1)}} = 102.7\,\text{км/сут} = 4.28\,\text{км/ч}. \qquad (1)$$

Время, необходимое для совершения кругосветки с постоянной скоростью $V_{\rm cr}$:

$$t_{tot}^{(2)} = \frac{2\pi\,\mathfrak{R}_\oplus}{V_{\rm cr}} = 120\,\text{сут}. \qquad (2)$$

здесь $\mathfrak{R}_\oplus = 6378$ км – средний экваториальный радиус Земли.

Ответ: $\bar{V} = 102.7\,\text{км/сут} = 4.28\,\text{км/ч}$; $t_{tot}^{(2)} = 120\,\text{сут}$. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Фазы Луны и ее гелиоцентрические расстояния»

Решение: Как известно, ***гелиоцентрическим расстоянием*** небесного тела называется расстояние от центра масс Солнца до центра масс данного тела. Вспомним, что система «Земля-Луна» обращается вокруг общего

Рис. 8: к определению фаз Луны и взаимного расположения Луны, земли. Солнца.

.

центра масс за 27.3 суток. Гелиоцентрическое расстояние Луны будет минимальным, очевидно, когда последняя будет расположена между Солнцем и Землей. Данному положению отвечает фаза новолуния, см рис. 8. Согласно рис. 2 новолуние произошло 10 января 2016 года. Гелиоцентрическое расстояние будет наибольшим, в случае, когда Луна будет расположена по другую сторону от Земли относительно Солнца, что согласно рис. 8 отвечает фазе полнолуния. Фаза полнолуния наступила 24.01.2016 года.

Ответ: расстояние от Луны до Солнца было наименьшим в фазе новолуния, 10 января 2016 года; наибольшим – в фазе полнолуния, 24 января 2016 года. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «О рассеянном скоплении»

Решение: речь идет, конечно, о скоплении, наиболее известное название которого – *Плеяды*. Его старинное русское название – *Стожары* или *Волосожары*. В Библии оно упоминается как *Кима*.

Семь самых ярких звезд скопления: 1) Альциона (25 Тельца, 2.86^{m}), 2) Атлас (27 Тельца, 3.62^{m}), 3) Электра (17 Тельца, 3.70^{m}), 4) Майя (20 Тельца, 3.86^{m}), 5) Меропа (23 Тельца, 4.17^{m}), 6) Тайгета (19 Тельца, 4.29^{m}), 7) Плейона (28 Тельца, 5.09^{m}). Скопление находится в созвездии Тельца. Наиболее яркие звезды образуют астеризм в виде ковшика с короткой ручкой (см. рис. 9). Он отдаленно напоминает астеризмы Большой и Малый ковш в созвездиях Большая и Малая Медведица.

Ответ: Плеяды, Стожары (Волосожары), Кима; Альциона, Атлас, Элек-

Рис. 9: Рассеянное скопление Плеяды (иллюстрация Wikipedia).

.

тра, Майя, Меропа, Тайгета, Плейона; в созвездии Тельца. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Три кратера Луны и три великих ученых»

Решение: Тихо Браге – это датский астроном XVI века, основатель первой Европейской обсерватории Ураниборг; 2) Николай Коперник – польский астроном, математик, механик XVI века, автор гелиоцентрической системы мира; 3) Иоганн Кеплер – немецкий астроном, механик, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы. Кратеры с соответствующими именами представлены на рис. 10.

Ответ: Тихо, Коперник, Кеплер, указаны на рис. 10. ($\$_{\max} = 6$ баллов).

Задача № 6. «Противостояние Марса 2016 года»

Дано:	***Решение:***
$\Re_{♂} = 3396$ км.	Как известно, ***противостоянием*** – называется конфигурация внешней планеты, при которой это тело находится примерно на продолжении линии «Солнце-Земля» и видно с Земли примерно в противоположном Солнцу направлении. Противостояние возможно только для верхних планет и других тел, находящихся дальше от Солнца, чем Земля.
Найти: $r_{♂}$ – ? дата, месяц – ?	

Вблизи противостояний складываются наилучшие условия наблюдения планет:

1) планеты находятся на наименьшем расстоянии от Земли (но за счет эллиптичности орбит значение минимального расстояния изменяется из года в год);

2) они обращены к Земле полушарием, освещенным Солнцем, то есть на-

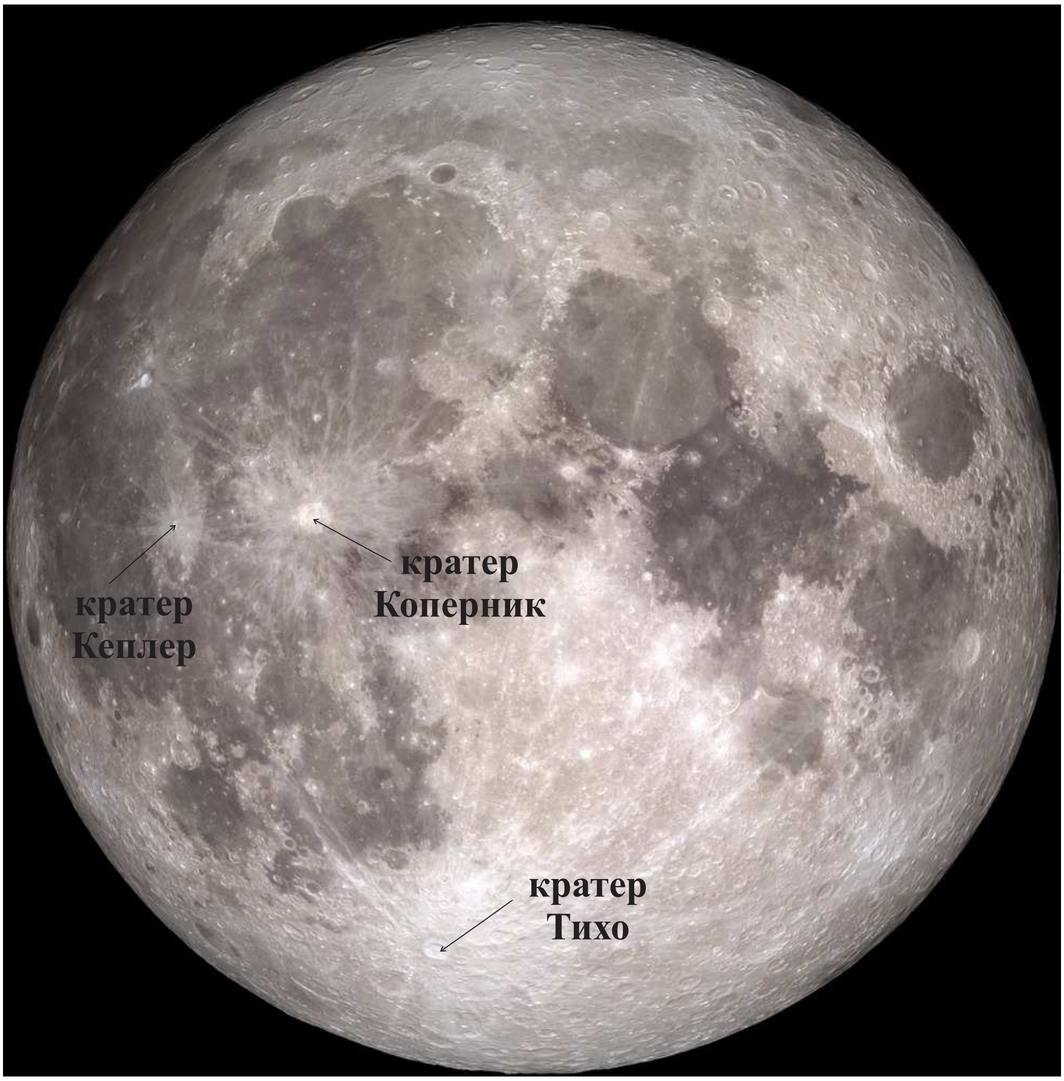


Рис. 10: Луна с кратерами Тихо, Коперник, Кеплер (источник: http://www.nasa.gov/).

ходятся в наибольшей фазе.

3) во время противостояния планета видна на небе всю ночь (восходит на востоке вечером с заходом Солнца, заходит на западе утром с восходом Солнца).

Если в противостоянии расстояние до планеты минимально, то ее угловой диаметр будет максимален. Из образов Марса, представленных на рис. 4, этому условию, очевидно, удовлетворяет образ, соответствующий 22 мая 2016 года. При этом угловой диаметр планеты будет равен $D''_{♂} = 18.4''$. Следовательно, легко вычислить расстояние от Земли до Марса ($\Delta_{♂}$) на указанный момент:

$$\sin(D''_{♂}/2) \approx \frac{D''_{♂}}{2 \cdot 206265''} = \frac{\mathfrak{R}_{♂}}{\Delta_{♂}}, \;\; \Rightarrow$$

$$\Delta_{♂} = 2 \cdot \mathfrak{R}_{♂} \left(\frac{206265''}{D''_{♂}} \right) = 76.14 \cdot 10^6 \text{ км} \approx 0.51 \text{ а.е.}$$

Следовательно, гелиоцентрическое расстояние Марса будет равно

$$r_{♂} = a_{\oplus} + \Delta_{♂} = 1.51 \text{ а.е.} = 225.7 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

здесь $a_\oplus = 1.00$ а.е. $= 149.6 \cdot 10^6$ км – радиус орбиты Земли.

Ответ: 22 мая 2016 года; $r_♂ = 225.7 \cdot 10^6$ км. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 7. «Выбор бинокля в магазине г.о. Самара»

Решение: 1) Для панорамных наблюдений звездного неба (удерживая инструмент в руках), знакомства с астеризмами и созвездиями необходим бинокль, прежде всего, с большим полем зрения, поскольку для панорамных наблюдений важен охват больших областей звездного неба. Кроме того, многие астеризмы и тем более созвездия имеют большие угловые размеры, и чтобы их целиком рассмотреть нужен именно такой бинокль. При этом требования к его разрешающей способности и проницающей силе не принципиальны, поскольку при изучении панорамы, важно выявить картину в целом, которую формируют, прежде всего, яркие объекты небосвода, видимые даже невооруженным глазом. Следовательно, оптимальным для этих целей будет инструмент с максимальным полем зрения (Ω). Из представленных кандидатов таким биноклем является – Nikon ACULON A211 7×35 ($\Omega = 9.3°$).

2) Для наблюдений за двойными звездами, планетами и их спутниками, имеющими малые угловые размеры, принципиально важно использовать бинокль с очень качественной оптикой (многослойное или полное многослойное покрытие), максимальным увеличением, разрешающей способностью (а следовательно, по возможности бóльшим диаметром объектива) и небольшим полем зрения. Оптимальным инструментом для этих целей будет Celestron SkyMaster 25×70.

3) Для изучения тусклых туманностей, шаровых скоплений, галактик (Deep-Sky объектов) прежде всего нужен светосильный инструмент с высококачественной оптикой и средним значениями увеличения (в силу значительной протяженности данных объектов) и диаметра поля зрения. Поскольку светосила пропорциональна квадрату диаметра объектива, то наболее предпочтительным кандидатом для этих целей является Celestron SkyMaster 20×80.

Ответ: 1) Nikon ACULON A211 7×35; 2) Celestron SkyMaster 25×70; 3) Celestron SkyMaster 20×80. (6 баллов).

Задача № 8. «Солнце в Северном Гоа»

Решение: прежде всего, идентифицируем солнечные пятна на фотографиях Давыдовой Л.М. с теми, что представлены на фотографии обсерватории (см. рис. 11) и изменим ориентацию последней для оптимального сходства образов.

Из сопоставлений рис. 5.в и 11.в, следует, что диск Солнца на фотографиях Давыдовой Л.М. лежит на боку, на своем западном крае. Такое изображение

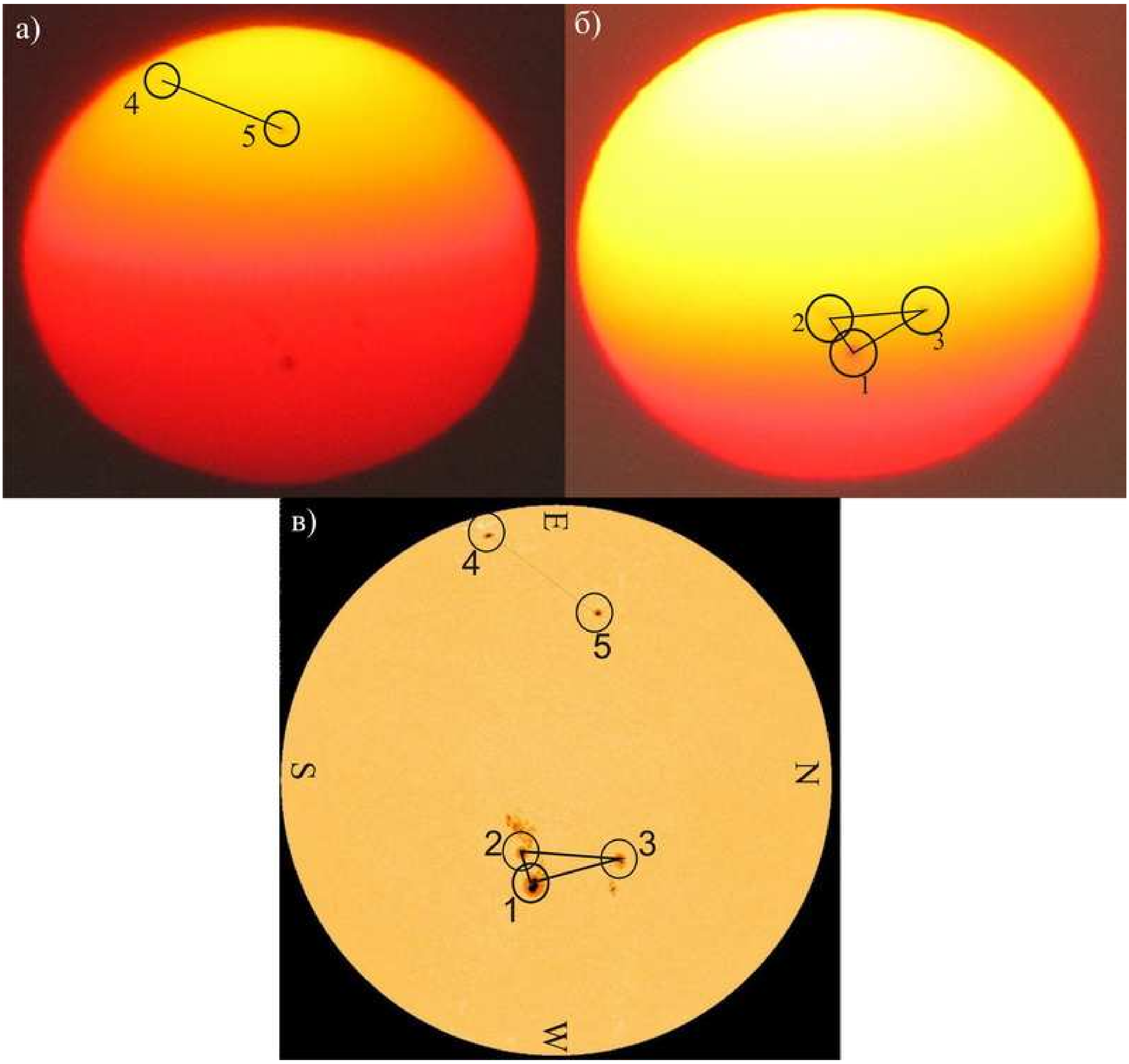


Рис. 11: а)-б) обработанные фотографии Солнца, сделанные жительницей г.о. Самара Давыдовой Л.М. 9.01.2014 года в Северном Гоа; в) фотография Солнца, полученная с помощью космической обсерватории в те же сутки и подстроенная под ориентацию пятен первых двух фото.

можно получить, пребывая в относительной близости к земному экватору, чему удовлетворяет Северное Гоа, средняя географическая широта которого составляет $\varphi = +15°$.

Поскольку западный край диска ближе к горизонту, то эти фотографии в северном полушарии были, очевидно, сделаны на закате. На это же указывает значительная сплюснутость диска Солнца, которая существенно проявляется лишь у горизонта, в силу явления рефракции света. Обсерватория SOHO получила фотографию Солнца из космоса, где нет искажений, вносимых земной атмосферой, поэтому диск Солнца здесь идеальный круг. (7 баллов).

Ответ: 1) пятна по-разному расположены на диске Солнца на этих фотографиях, поскольку Давыдова Л.М. получила изображение Солнца "лежа на боку", на своем западном крае. Это объясняется относительной близостью Северного Гоа к земному экватору; фото сделаны на закате; сплюснутость диска Солнца на фото Давыдовой Л.М. обусловлены явлением рефракции света. (7 баллов).

Задача № 9. «Юпитерианская истинная солнечная секунда»

Решение: при определении шкалы истинного солнечного времени под ***истинной солнечной секундой*** ($t_\odot$) понимается величина промежутка времени, равная 1/86400 долей продолжительности истинных солнечных суток.

В свою очередь, под ***истинными солнечными сутками*** понимается промежуток времени (S), между двумя последовательными одноименными кульминациями истинного Солнца на данном географическом меридиане. Для планеты, у которой совпадают направления вращения вокруг своей оси (с периодом T_S) и обращения вокруг Солнца (с периодом T_R), данный промежуток вычисляется по формуле:

$$S = \frac{T_S\, T_R}{T_R - T_S}.$$

В случае Земли $T_S^{(\oplus)} = 23$ часа 56 мин 4 сек = 86164 сек, $T_R^{(\oplus)} = 365.2564$ сут, тогда $S_\oplus = 86400$ с.

В случае Юпитера: $T_S^{(♃)} = 9$ часов 55 мин 30 сек = 35730 сек, $T_R^{(♃)} = 4332.589$ сут, тогда $S_♃ = 35733$ с.

Следовательно, отношение продолжительностей истинных солнечных секунд на Земле и Юпитере есть

$$\frac{t_\odot^{(\oplus)}}{t_\odot^{(♃)}} = \frac{S_\oplus}{S_♃} = 2.42.$$

Ответ: продолжительность истинной солнечной секунды на Юпитере меньше соответствующего значения на Земле в 2.42 раза. (8 баллов).

Задача № 10. «Кратность увеличения оптической системы «лупа-глаз»»

Решение: пусть h – линейные размеры небольшого предмета, наблюдаемого глазом с расстояния наилучшего зрения d_0. Тогда тангенс угла α, под которым будет виден данный предмет есть

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{h}{d_0}. \tag{3}$$

здесь подразумевается, что для небольшого предмета выполняется условие $h \ll d_0$. Если предмет рассматривается через тонкую линзу лупы, то для нее справедливо *уравнение тонкой линзы*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{4}$$

здесь a, b, f – расстояния (с учетом знака) от предмета до линзы, от линзы до изображения и фокусное расстояние линзы соответственно.

Не трудно убедиться в том, что если с помощью лупы мы получаем прямое изображение (см. рис. 12), то оно должно быть мнимым, т.е. $b < 0$ (образ предмета формируется в подпространстве предметов), следовательно, $a \leq f$. Традиционно в геометрической оптике используются понятия *линейного* ($\Gamma^{(\ell)}$) и *углового* ($\Gamma^{(a)}$) увеличения линзы (оптической системы):

$$\Gamma^{(\ell)} = \frac{H}{h}, \quad \Gamma^{(a)} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad (5)$$

здесь h, H – линейные размеры предмета и его изображения; β – угол, под которым виден данный предмет с помощью линзы. Причем,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{a}, \quad \Rightarrow \quad \beta \approx \frac{h}{a}, \text{ при } h \ll a.$$

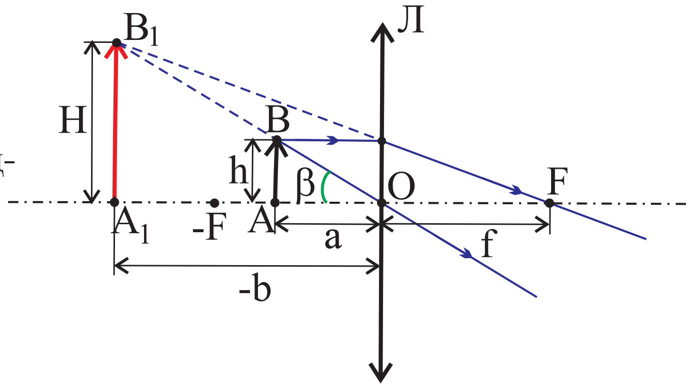


Рис. 12: к определению углового и линейного увеличений лупы.

Из подобия треугольников $\triangle OAB$ и $\triangle OA_1B_1$ следует, что

$$\frac{H}{h} = \frac{|b|}{a} = \frac{f}{(f-a)}, \quad \text{где } |b| = \frac{a\,f}{f-a}.$$

При выводе последнего результата мы использовали формулу (4) и условие $b < 0$. Тогда указанные увеличения можно представить в виде:

$$\Gamma^{(\ell)} = \frac{f}{(f-a)}, \quad \Gamma^{(a)} = \frac{d_0}{a}. \qquad (6)$$

При $a \to f$, линейное увеличение линзы стремится к бесконечности, а угловое наоборот – стремится к своему минимальному значению:

$$\Gamma^{(a)}_{\min\,L} = \frac{d_0}{f} = d_0\Phi_l, \qquad (7)$$

здесь $\Phi_l = 1/f$ – оптическая сила лупы. Учитывая, что в создании изображения вносит вклад сам глаз, к которому, как правило, в плотную примыкает лупа, то оптическая сила системы «лупа-глаз» есть

$$\Phi_{\text{tot}} = \Phi_l + \Phi_y, \quad \text{где } \Phi_y = \frac{1}{d_0}.$$

По аналогии с (7) запишем минимальное угловое увеличение системы: «лупа-глаз»:

$$\Gamma^{(a)}_{\min\,L+Y} = \frac{d_0}{f} = d_0\Phi_{\text{tot}} = d_0\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{d_0}\right) = \frac{f+d_0}{f} = 1 + \frac{d_0}{f}. \qquad (8)$$

Что и требовалось доказать. Отметим, что, например, линза с $f = d_0/2$ будет создавать вместе с глазом минимальное угловое увеличение, равное $3^{\times}$. (8 баллов).

Задача № 11. «Транзиты Меркурия»

Решение: если плоскость орбиты Меркурия совпадала бы с плоскостью орбиты Земли, а сама орбита была круговой, то транзиты данной планеты по диску Солнца, можно было бы наблюдать каждый синодический месяц ($S_{☿}$). Определим его. Для этого воспользуемся значениями сидерических периодов обращения Меркурия и Земли вокруг Солнца: $T_{☿} = 87.9691$ сут, $T_{\oplus} = 365.2564$ сут. Тогда

$$S_{☿} = \frac{T_{☿} T_{\oplus}}{T_{\oplus} - T_{☿}} = 115.88\,\text{сут.}$$

Ответ на вопрос о частоте наступления такого "транзитного" года неоднозначен. Определим отношение средней продолжительности календарного (григорианского) года ($\bar{Y}_G = 365.2425$ сут) к найденному значению:

$$N = \frac{\bar{Y}_G}{S_{☿}} = 3.15,$$

т.о. в один календарный год укладывается $N = 3$ синодических периода, а следовательно, максимальное количество транзитов Меркурия должно быть

$$N + 1 = 4,$$

при условии, что первый транзит приходился на начало года. Представим N в виде натуральной дроби:

$$N = \frac{315}{100} = \frac{63}{20},$$

следовательно, приблизительно, на каждые двадцать лет приходилось 63 транзита Меркурия и вновь начинался бы новый цикл. Поэтому "транзитный" год происходил 1 раз в 20 лет. Это минимально возможное значение частоты появления "транзитного" года.

В действительности такой год может повторяться чаще. Предположим, что первый транзит "транзитного" года приходится на самое его начало. Очередной календарный год вновь будет с максимальным количеством транзитов, если первый транзит этого года будет отстоять от его начала не более чем на $0.15\, S_{☿}$. Заметим, что

$$7 \cdot N - 7 = 0.05,$$

следовательно, в данном случае год повторится через 7 лет. Однако, такая ситуация реализуется не всегда.

Ответ: максимальное количество транзитов Меркурия по диску Солнца равно 4; "транзитный" год повторялся бы с минимальной частотой 1 раз в 20 лет; максимальной частотой – 1 раз в 7 лет. (9 баллов).

Задача № 12. «Моя любовь на пятом этаже...»

Решение: отметим, что в момент, когда на часах четвертый час Луна уже не видна, это означает, что она либо находится низко над горизонтом, либо уже зашла за горизонт (при наличии стабильно ясного неба). Значит Луна была видна преимущественно в первую половину ночи. Следовательно, событие, описанное в песне, происходило до полнолуния, на растущей Луне.

Если события происходят в Самаре, то широта местности – $\varphi_S = 53°12'$. На данной широте определим максимально и минимально допустимые значения высоты Луны. Для этого учтем, что

1. небесный экватор по отношению к горизонту в г. Самаре расположен под углом $90° - \varphi = 36°48'$;
2. эклиптика по отношению к небесному экватору может располагаться под углами $\pm\varepsilon$ ($\varepsilon = 23°26'$);
3. орбита Луны может составлять с плоскостью эклиптики угол $\pm i_{☾}$ ($i_{☾} = 5°09'$).

В итоге минимальная и максимальная высота Луны в г. Самаре определяются следующими значениями:

$$h_{\min} = 90° - \varphi - \varepsilon - i_{☾} = 8°13', \quad h_{\max} = 90° - \varphi + \varepsilon + i_{☾} = 65°23' \qquad (9)$$

Оценим далее высоту H_5 (от Земли, по рис. 6), соответствующую высоте средней (по высоте) точки пятого этажа. Для этого по картинке определяем в (см) высоту здания – 12.2 см (Ваше значение может отличаться от указанного). Затем, измеряем расстояние от верхней засечки (на уровне кровельного козырька) до середины (по высоте) пятого этажа – 1.1 см. Составляем пропорцию:

$$\left\{\begin{array}{ll} 12.2\,\text{см} & \to 13600\,\text{мм}, \\ 1.1\,\text{см} & \to x\,\text{мм}, \end{array}\right\} \to x = 1.226\,\text{м}$$

В итоге

$$H_5 = 13.600\,\text{м} - 1.226\,\text{м} = 12.37\,\text{м}.$$

Если Луна была на уровне пятого этажа (с позиции главного героя песни), то ее угловая высота, линейная высота H_5 и расстояние до дома Δ связаны соотношением:

$$\operatorname{tg} h = \frac{H_5}{\Delta}, \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{H_5}{\operatorname{tg} h}.$$

Следовательно, минимальное и максимальное значения расстояния героя песни от дома были

$$\Delta_{\min} = \frac{H_5}{\operatorname{tg} h_{\max}} = 5.67\,\text{м}, \quad \Delta_{\max} = \frac{H_5}{\operatorname{tg} h_{\min}} = 85.67\,\text{м}. \qquad (10)$$

Ответ: $5.67\,\text{м} \leq \Delta \leq 85.67\,\text{м}$; герой песни наблюдал растущую Луну. ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Центральные меридианы часовых поясов на Юпитере»

Дано:

$\varphi_1 = 0°$,
$\varphi_2 = 45°$,
$\mathfrak{R}_J = 71492$ км,
$k = 0.065$.

Найти:

Δ_1, Δ_2 – ?

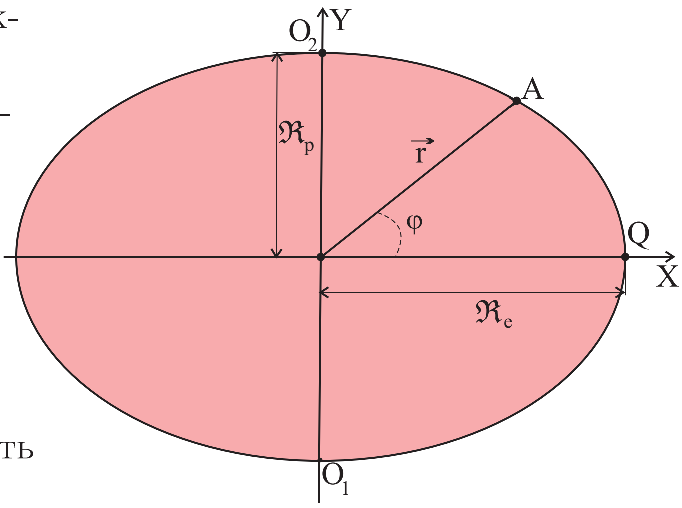
Решение:

Вспомним, что поверхность Земли условно делят на 24 часовых пояса, приблизительно в центре каждого расположен центральный меридиан. Т.о. угловое расстояние между соседними меридианами составляет 15°. Необходимо определить дугу юпитерианского экватора, соответствующую указанному углу. Поскольку $2\pi\,\mathfrak{R}_J$ км соответствует углу в 360°, то Δ_1 км соответствует 15°,

т.е. имеет место следующая пропорция:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_1\,\text{км} & \to 15°, \\ 2\pi\,\mathfrak{R}_J\,\text{км} & \to 360°, \end{array} \right\} \to \Delta_1 = \frac{2\pi\,\mathfrak{R}_J}{24} = 18717\,\text{км}.$$

Для определения расстояния между меридианами на широте φ_2 необходимо учесть, что форма тела Юпитера – эллипсоид вращения, сплюснутый у полюсов. Если тело планеты мысленно рассечь плоскостью, содержащей его ось вращения, то в сечении тело Юпитера будет представляться эллипсом (см. рис. 13), каноническое уравнение которого есть



$$\frac{x^2}{{\mathfrak{R}_J^{(e)}}^2} + \frac{y^2}{{\mathfrak{R}_J^{(p)}}^2} = 1. \qquad (11)$$

Рис. 13: к определению масштабов эллипса Юпитера.

здесь $\mathfrak{R}_J^{(e)}, \mathfrak{R}_J^{(p)}$ – экваториальный и полярный радиусы Юпитера. Можно легко убедиться (прямой подстановкой в (11)) в том, что координаты x, y с одной стороны можно представить как

$$x = \mathfrak{R}_J^{(e)} \cos\alpha, \quad y = \mathfrak{R}_J^{(p)} \sin\alpha,$$

где α – некоторый вспомогательный параметр. С другой стороны их можно представить в терминах полярных координат:

$$x = r\,\cos\varphi,\;\; y = r\,\sin\varphi,\;\Rightarrow\;\; \operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{R}_J^{(p)}}{\mathfrak{R}_J^{(e)}}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (12)$$

Учитывая, что коэффициент сжатия равен

$$k = \frac{\mathfrak{R}_J^{(e)} - \mathfrak{R}_J^{(p)}}{\mathfrak{R}_J^{(e)}} = 1 - \frac{\mathfrak{R}_J^{(p)}}{\mathfrak{R}_J^{(e)}},\;\;\Rightarrow\;\; \frac{\mathfrak{R}_J^{(p)}}{\mathfrak{R}_J^{(e)}} = 1 - k. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{1-k}\operatorname{tg}\varphi,\;\;\Rightarrow\;\; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1-k}{\sqrt{(1-k)^2 + \operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

Радиус круга широты на широте φ_2 равен $r_2 = x = \mathfrak{R}_J^{(e)}\cos[\alpha(\varphi_2)]$ или

$$r_2 = \frac{\mathfrak{R}_J^{(e)}(1-k)}{\sqrt{(1-k)^2+1}} = 48827\,\text{км}.$$

Далее, рассуждая по аналогии с случаем расстояния Δ_1 на экваторе, получаем

$$\Delta_2 = \frac{2\pi\,r_2}{24} = 12783\,\text{км}.$$

Ответ: $\Delta_1 = 18717$ км, $\Delta_2 = 12783$ км. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Проект ракеты на шариках»

Дано:
v, η.
Найти:
u_n – ?

Решение:

Рассмотрим процесс выброса первого шарика из ракеты. Система «шарик-ракета» является замкнутой, следовательно, для нее выполняется закон сохранения импульса в инерциальной системе отсчета, в которой в начальный момент ракета покоилась:

$$0 = (M-m)\,u_1 - m\,(v-u_1),\;\;\Rightarrow\;\; u_1 = \frac{m\,v}{M} = \frac{v}{\eta},\;\; \text{где}\;\; \eta = \frac{M}{m},$$

здесь m, M – масса шарика и начальная масса ракеты соответственно, u_1 – скорость ракеты после выброса первого шарика. Для выброса второго шарика, рассуждаем по аналогии:

$$(M-m)u_1 = (M-2m)u_2 - m(v-u_2),\;\;\Rightarrow\;\; (\eta-1)u_2 = u_1(\eta-1) + v,\;\;\Rightarrow$$

$$u_2 = v\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1}\right).$$

Для выброса третьего шарика имеем уравнение вида:

$$(M-2m)u_2 = (M-3m)u_3 - m(v-u_3), \;\Rightarrow (\eta-2)u_2 = (\eta-2)u_3 - v, \;\Rightarrow$$

$$u_3 = v\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1} + \frac{1}{\eta-2}\right).$$

Далее воспользуемся *методом математической индукции*: сформулируем гипотезу – исходя из явных выражений для u_1, u_2, u_3 предположим, что для скорости ракеты после выброса $n-1$ шарика выполняется выражение вида:

$$u_{n-1} = v\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1} + \frac{1}{\eta-2} + \frac{1}{\eta-3} + \ldots + \frac{1}{\eta-(n-2)}\right),$$

тогда после выброса n-го шарика, скорость ракет должна быть равна

$$u_n = v\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1} + \frac{1}{\eta-2} + \frac{1}{\eta-3} + \ldots + \frac{1}{\eta-(n-2)} + \frac{1}{\eta-(n-1)}\right).$$

Докажем справедливость гипотезы. Запишем закон сохранения импульса для процесса выброса n-го шарика:

$$(M-(n-1)m)u_{n-1} = (M-n\,m)u_n - m(v-u_n), \;\Rightarrow$$

$$(\eta-(n-1))u_{n-1} = (\eta-(n-1))u_n - v, \;\Rightarrow$$

$$u_n = u_{n-1} + \frac{v}{(\eta-(n-1))} =$$

$$= v\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1} + \frac{1}{\eta-2} + \frac{1}{\eta-3} + \ldots + \frac{1}{\eta-(n-2)} + \frac{1}{\eta-(n-1)}\right),$$

что и требовалось доказать. Скорость ракеты u_n можно представить в компактном виде:

$$u_n = v\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\eta-(i-1)}. \tag{14}$$

К сожалению, данный результат упростить еще каким-либо способом невозможно.

Ответ: представляется выражением (14). ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Planet Nine и ее орбитальные характеристики»

Решение: а) на печатной копии рис. 7 определяем линейный масштаб фотографии: для этого определяем длину эталонного отрезка в $L = 100$ а.е. в мм – $\ell = 10$ мм (Ваши значения могут отличаться от указанных в решении задачи, поскольку картинки могут быть распечатаны с разными масштабами). Тогда линейный масштаб есть

$$\mu_\ell = \frac{L}{\ell} = 10\,\text{а.е./мм}.$$

Далее измерим по рис. 7 расстояния от ближайшей точки орбиты (перигелия) до Солнца – $\ell_q = 20$ мм и от Солнца до самой далекой точки ее орбиты (афелия) – $\ell_Q = 135$ мм. Следовательно, расстояния до перигелия и афелия орбиты Planet Nine есть

$$q = \mu_\ell \, \ell_q = 200 \,\text{а.е.}, \;\; Q = \mu_\ell \, \ell_Q = 1350 \,\text{а.е.}$$

б) далее вспомним, что расстояния q, Q можно представить через большую полуось орбиты и ее эксцентриситет:

$$q = a(1-\varepsilon), \;\; Q = a(1+\varepsilon), \;\; \Rightarrow$$

$$a = \frac{q+Q}{2} = 775 \,\text{а.е.}, \;\; \varepsilon = \left(\frac{Q-q}{Q+q}\right) = 0.742. \qquad (15)$$

в) вычислим сидерический период обращения планеты вокруг Солнца с использованием третьего закона Кеплера:

$$\left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2, \;\; \Rightarrow \;\; T = T_\oplus \left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^{3/2} = 21575 \,\text{лет.}$$

г) как известно, закон Тициуса-Боде определяет (приближенно) среднее гелиоцентрическое расстояние планеты от Солнца (большую полуось ее орбиты) и представляется в виде:

$$r_n = 0.1(4 + 3 \cdot 2^n), \qquad (16)$$

где n – планетный индекс, равный для Меркурия – $-\infty$, для Венеры – 0, для Земли – 1, для Марса – 2, для астероидов главного пояса – 3, для Юпитера – 4, для Сатурна – 5, для Урана – 6, для Плутона – 7; для Эриды – 8; для Нептуна данный закон не работает.

Проверим значения r_n для бо́льших значений параметра n:

n	r_n, а.е.	n	r_n, а.е.
9	154	10	307.6
11	614.8	12	1229.2

Из приведенных результатов следует, что большая полуось не соответствует (даже очень грубо) ни одному из значений планетных расстояний, предсказываемых законом Тициуса-Боде. Т.о. для Planet Nine, как и для Нептуна, данный закон не работает.

д) как известно, ***орбитальный резонанс*** в небесной механике – это ситуация, при которой периоды обращения двух (или более) небесных тел соотносятся как *небольшие натуральные числа.* Поскольку период обращения

Planet Nine превосходит более чем в 131 раз период обращения самой "медленной" классической планеты – Нептуна, то о каких-либо резонансах нет смысла вести речь, ибо натуральные числа, которые их определяют являются очень большими, что противоречит смыслу самого понятия.

Ответ: а) $q = 200$ а.е., $Q = 1350$ а.е.; б) $a = 775$ а.е., $\varepsilon = 0.742$; в) $T = 21575$ лет; г) закон Тициуса-Боде для Planet Nine не работает; д) поскольку сидерический период обращения Planet Nine вокруг Солнца много больше значений периодов обращения всех известных классических планет, то об орбитальном резонансе нет смысла говорить. ($\$_{\rm max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Расстояние до рассеянного скопления М36»

Дано:
$N = 60$,
$m_{int} = +6.0^m$,
$\eta = 2/3$,
$\Delta M = 5.5^{\rm m}$.
Найти:
r – ?

Решение:

Прежде всего, оценим видимую звездную величину одной звезды скопления М36: для этого учтем, что в скоплении есть $\eta \cdot N$ приблизительно одинаковых наиболее ярких звезд, следовательно, освещенность, создаваемая одной такой звездой у поверхности Земли есть

$$E_* = \frac{E_{int}}{\eta\, N} = \frac{E_{int}}{40} \approx \frac{E_{int}}{(2.512)^4}.$$

Поскольку отношение освещенностей, равное 2.512 соответствует разности звездных величин, равное $1^{\rm m}$, то множитель $(2.512)^4$ соответствует разности $4^{\rm m}$. Следовательно, звездная величина звезды есть

$$m_* = m_{int} + 4^{\rm m} = 10^{\rm m}.$$

Абсолютная звездная величина (M_*) (соответствующая расстоянию $r_0 = 10$ пк) таких звезд удовлетворяет условию:

$$\Delta M = M_\odot - M_*, \;\Rightarrow\; M_* = M_\odot - \Delta M = -0.76^{\rm m}, \text{ где } M_\odot = 4.74^{\rm m}.$$

Следовательно модуль расстояния для звезды скопления есть

$$m_* - M_* = 10.76^{\rm m} \approx 11^{\rm m} = 5^{\rm m} + 5^{\rm m} + 1^{\rm m}.$$

Разность звездных величин равное пяти соответствует отношению освещенностей равному 100, тогда

$$\frac{E_0}{E_*} = 100 \times 100 \times 2.512,$$

иначе, согласно закону обратных квадратов:

$$\frac{E_*}{E_0} = \left(\frac{10}{r}\right)^2, \;\Rightarrow$$

$$r = 10 \times 10 \times 10 \times \sqrt{2.512} = 1.58 \cdot 10^3 \text{ пк}.$$

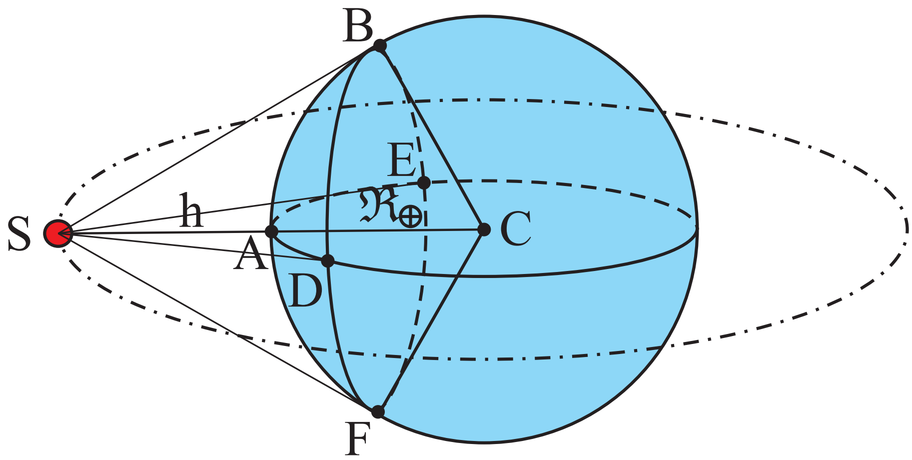


Рис. 14: к определения зоны прямой видимости ИСЗ.

Полученное значение расстояния весьма близко к наиболее точному значению – $1.32 \cdot 10^3$ пк.

Ответ: $r = 1.58 \cdot 10^3$ пк. ($\$_{\rm max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Минимальная и максимальная области прямой видимости ИСЗ с Земли»

Решение: рассмотрим ИСЗ, движущийся вокруг Земли по круговой орбите (см. рис. 14) радиуса $r = \mathfrak{R}_\oplus + h$, здесь $\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км – средний радиус Земли, h – высота орбиты спутника. В данный момент времени ИСЗ (при условии ясной погоды) видно с любой точки части поверхности Земли, определяемой шаровым сектором $ABEFD$. Отношение (η) площади данного сектора к площади поверхности всего земного шара есть искомая величина:

$$\eta = \frac{S_{\rm sector}}{S_{\rm sphere}}. \tag{17}$$

Можно показать[1], что площадь поверхности шарового сектора радиуса $\mathfrak{R}_\oplus$ и площадь поверхности сферы представляются в виде:

$$S_{\rm sector} = 2\pi\mathfrak{R}_\oplus^2(1 - \cos\alpha), \quad S_{\rm sphere} = 4\pi\mathfrak{R}_\oplus^2, \tag{18}$$

здесь α – угол раствора конуса $BEFDC$, на который опирается шаровой сектор (см. рис. 14).

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔSBC, для него, очевидно, выполняется следующее равенство:

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}.$$

С использованием выражений (17), (18) и последней формулы получаем:

$$\eta = \frac{1}{2}\left[\frac{h}{\mathfrak{R}_\oplus + h}\right]. \tag{19}$$

[1]Смотри, например, Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: АСТ: Астрель. – 2006. – 991с.

Т.о. чем больше высота спутника, тем ближе искомая величина η к значению 1/2. Следовательно, минимальное значение $\eta_{\min}$ достигается при $h_{\min} = 180$ км:

$$\eta_{\min} = \frac{1}{2}\left[\frac{h_{\min}}{\mathfrak{R}_\oplus + h_{\min}}\right] = 0.0137.$$

Т.о. минимальная доля поверхности Земли, находящаяся в пределах прямой видимости составляет всего 1.37%. Максимальная доля поверхности Земли будет определяться максимально допустимой высотой орбиты спутника – которая, в свою очередь, будет определяться радиусом сферы Хилла.

Сферой Хилла Земли называют воображаемую поверхность, охватывающую Землю, в каждой точке которой для ИСЗ с нулевой скоростью его полная механическая энергия равна нулю. Выход ИСЗ за пределы данной сферы означает, что последний перестает быть, в принципе, спутником Земли. Можно показать, что радиус сферы Хилла Земли в системе "Солнце-Земля" представляется в виде [2]:

$$R^{(\oplus)}_{\rm Hill} \approx a_\oplus \cdot \left[\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)\right] \approx 0.01 \cdot a_\oplus, \tag{20}$$

$$\text{где} \;\; \mu = \frac{\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{M}_\odot} = 3.00 \cdot 10^{-6}.$$

Поскольку радиус сферы Хилла отсчитывается от центра Земли, то $h_{\max} = R^{(\oplus)}_{\rm Hill} - \mathfrak{R}_\oplus$, тогда

$$\eta_{\max} = \frac{1}{2}\left[\frac{R^{(\oplus)}_{\rm Hill} - \mathfrak{R}_\oplus}{R^{(\oplus)}_{\rm Hill}}\right] \approx \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{0.01 \cdot a_\oplus}\right] = 0.4979.$$

Ответ: $\eta_{\min} = 0.0137$, $\eta_{\max} = 0.4979$. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Проект орбитальной космической печи»

Дано:
$T_{\rm m}$,
$T_{\max} = +4215$°C,
A, $m_{\rm m}$.

Найти:
r, P – ?

Решение:

Воспользуемся третьим законом Кеплера для космической печи и Земли:

$$\left(\frac{P}{P_\oplus}\right)^2 = \left(\frac{r}{a_\oplus}\right)^3, \;\Rightarrow\; P = P_\oplus\left(\frac{r}{a_\oplus}\right)^{3/2}, \tag{21}$$

здесь $P_\oplus = 1$ год – период обращения Земли вокруг Солнца; $a_\oplus = 1$ а.е. – большая полуось земной орбиты. Далее учтем, что поглощенная энергия солнечного излучения металлическим шаром тратится на процессы переизлучения и плавления. Запишем уравнение энергетического баланса для

[2]Смотри, например, Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука. – 1968. – 800с.

куска металла, находящегося на гелиоцентрическом расстоянии r в стадии плавления:

$$N_{\rm abs} = N_{\rm rad} + N_{\rm melt}. \tag{22}$$

здесь $N_{\rm abs}$ – мощность излучения, поглощенного куском металла, можно записать так:

$$N_{\rm abs} = f_{\odot}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^2 (1 - A_{\rm m})\pi R^2, \tag{23}$$

где $f_{\odot} = 1361$ Вт/м^2 – солнечная постоянная. Мощность излучения $P_{\rm rad}$, излучаемого шаром есть

$$N_{\rm rad} = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm m}^4,$$

здесь $\sigma = 6.57{\cdot}10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$ К^4) – постоянная Стефана-Больцмана. Мощность $N_{\rm melt}$ представляется выражением вида

$$N_{\rm melt} = \lambda_{\rm m}\frac{m_{\rm m}}{P} = \frac{4}{3}\pi\,\lambda_{\rm m}\,R^3\,\frac{\rho_{\rm m}}{P} = \frac{4}{3}\pi\,\lambda_{\rm m}\,R^3\,\frac{\rho_{\rm m}}{P_{\oplus}}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{3/2}.$$

В итоге уравнение баланса (22) представляется в виде:

$$f_{\odot}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^2 (1 - A_{\rm m})\pi R^2 = 4\pi R^2\sigma T_{\rm m}^4 + \frac{4}{3}\pi\,\lambda_{\rm m}\,R^3\,\frac{\rho_{\rm m}}{P_{\oplus}}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{3/2}. \tag{24}$$

Поделим все уравнение на $4\pi R^2\sigma T_{\rm m}^4$ и введем новую переменную и параметры:

$$x = \sqrt{\frac{a_{\oplus}}{r}},\quad A = \frac{f_{\odot}(1 - A_{\rm m})}{4\,\sigma T_{\rm m}^4},\quad B = \frac{1}{3}\frac{\lambda_{\rm m}\,R\rho_{\rm m}}{P_{\oplus}\,\sigma T_{\rm m}^4}. \tag{25}$$

В результате уравнение (24) представляется в виде:

$$A\,x^4 = B\,x^3 + 1. \tag{26}$$

Вычислим значения параметров A, B для данных металлов:

Металл	R, м	$\rho_{\rm m}$, кг/м^3	$\lambda_{\rm m}$, кДж/кг	$A_{\rm m}$	$T_{\rm m}$, К	A,	B
Алюминий	1	2700	398.310	0.19	933.5	$6.40 \cdot 10^{-3}$	$2.64 \cdot 10^{-4}$
Никель	1	8902	299.728	0.15	1999	$3.19 \cdot 10^{-4}$	$3.11 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2: значения исходных и вспомогательных параметров задачи.

Очевидно, что уравнение (28) проще всего решить графически. Для этого будем далее полагать, что $f_1(x) = A\cdot x^4$, $f_2(x) = B\cdot x^3 + 1$, построим графики данных функций, найдем точку их пересечения и соответствующее значение x_0. Из рис. 15.а) для алюминия имеем $x_0 = 3.55$, согласно 15.б) для никеля $x_0 = 7.50$.

Соответствующие значения радиусов орбит и периодов обращения, согласно (25), (21), представляются следующими значениями:

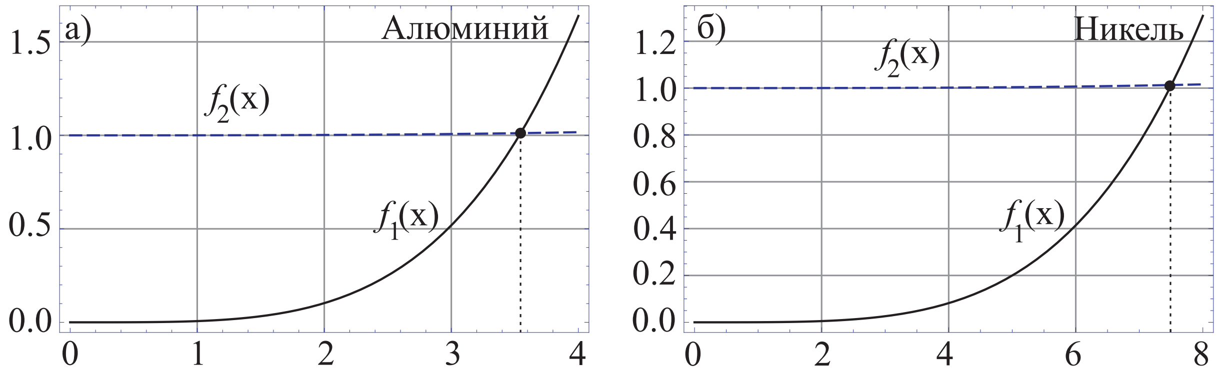


Рис. 15: к определения решения уравнения (28) для а) алюминия, б) никеля.

Металл	r, а.е.	P, сут
Алюминий	0.0795	8.19
Никель	0.0178	0.86

Таблица 3: результаты расчетов для радиуса круговой орбиты и периода обращения космической печи.

Т.о. печь должна быть расположена очень близко к Солнцу, в сравнение с Землей и период обращения будет составлять несколько суток.

Очевидно, что чем ближе расположена печь к Солнцу, тем больше металла она сможет переплавить за один оборот вокруг Солнца. Однако, сама печь не должна при этом разрушится. Очевидно, что температура печи не должна превышать значение $T_{\max}$. Найдем радиус орбиты, на которой достигается такая температура печи. Для это вновь воспользуемся уравнением энергетического баланса:

$$f_\odot \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^2 (1-A_f)\pi\, R_f^2 = 4\pi R_f^2 \sigma T_{\max}^4, \ \Rightarrow$$

$$r_{\min} = a_\oplus \sqrt{\frac{f_\odot(1-A_f)}{4\,\sigma T_{\max}^4}} = 0.0041\,\text{а.е.} = 6.19\cdot 10^5\,\text{км} < \mathfrak{R}_\odot. \qquad (27)$$

Т.о. минимально возможный радиус орбиты печи равен радиусу Солнца ($\mathfrak{R}_\odot$), при этом, согласно (21), $P = 2.78$ часа.

Запишем вновь уравнение энергетического баланса для металлического шара (24):

$$f_\odot \left(\frac{a_\oplus}{\mathfrak{R}_\odot}\right)^2 (1-A_{\rm m})\pi\, R^2 = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm m}^4 + \frac{4}{3}\,\pi\,\lambda_{\rm m}\, R^3\, \frac{\rho_{\rm m}}{P_\oplus}\left(\frac{a_\oplus}{\mathfrak{R}_\odot}\right)^{3/2}, \ \Rightarrow \qquad (28)$$

$$R_{\max} = \frac{3}{4}\frac{f_\odot(1-A_{\rm m})P_\oplus}{\lambda_{\rm m}\,\rho_{\rm m}}\sqrt{\frac{a_\oplus}{\mathfrak{R}_\odot}} - 3\frac{\sigma T_{\rm m}^4\,P_\oplus}{\lambda_{\rm m}\,\rho_{\rm m}}\left(\frac{\mathfrak{R}_\odot}{a_\oplus}\right)^{3/2} = 105.6\,\text{м}. \qquad (29)$$

Соответствующее значение массы есть $M_{\max} = \frac{4}{3}\pi R_{\max}^3 \rho_{\rm m} = 4.4\cdot 10^{10}$ кг. Значение последнего эквивалентно массе астероида небольших размеров. Т.о. такую печь можно было бы использовать для переплавки небольших астероидов и использования металла на благо человечества.

<u>Ответ:</u> представлен системой значений таблицы (3), а также величинами $M_{\max} = 4.4 \cdot 10^{10}$ кг, при $r = \mathfrak{R}_{\odot}$, $P = 2.78$ часа. ($\$_{\max} = 15$ баллов).